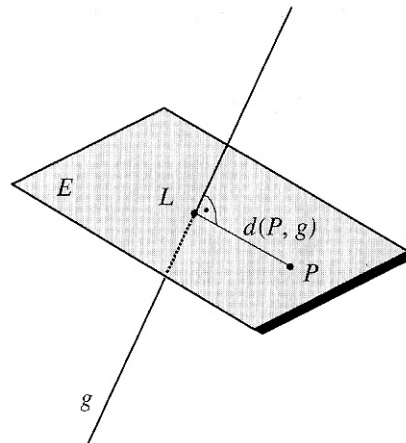


## Berechnung des Abstandes eines Punktes P von einer Geraden



Vorgehen zur Bestimmung des Abstandes des Punktes P von der Gerade g:

- Aufstellen einer Hilfsebene E, die senkrecht auf der Geraden g steht und den Punkt P enthält (der Richtungsvektor der Geraden g ist damit der Normalenvektor der gesuchten Ebene E).
- Schnittpunkt L der Geraden g mit der Ebene E berechnen.
- Der Abstand des Punktes P zur Geraden g ist dann die Länge des Vektors  $\vec{LP}$ .

Beispiel:  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad Q(5/3/6)$

Bestimme Hilfsebene E, die auf g senkrecht steht und Q enthält.

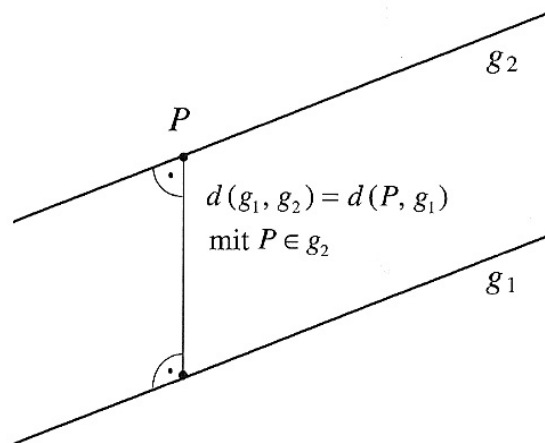
$$E: \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow E: 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5 = 0$$

$$g \cap E = \{F\} \Rightarrow 4(2 + 4t) + 3(10 + 3t) - 4(-2 - 4t) - 5 = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(Q; g) = |\overrightarrow{FQ}| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 9$$

## Berechnung des Abstandes zweier paralleler Geraden im Raum



Die Berechnung des Abstandes zweier paralleler Geraden kann auf den Fall Abstand eines Punktes von einer Geraden zurückgeführt werden. Der Abstand zweier paralleler Geraden  $g_1$  und  $g_2$  ist der Abstand eines beliebigen Punktes  $P$  der Geraden  $g_2$  von der Geraden  $g_1$ :

$$d(g_1; g_2) = d(P; g_1).$$

Beispiel:  $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$        $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren von  $g_1$  und  $g_2$  sind linear abhängig  $\Rightarrow g_1 // g_2$

Bestimme Hilfsebene E, die auf  $g_1$  senkrecht steht und  $P(1/0/1) \in g_2$  enthält.

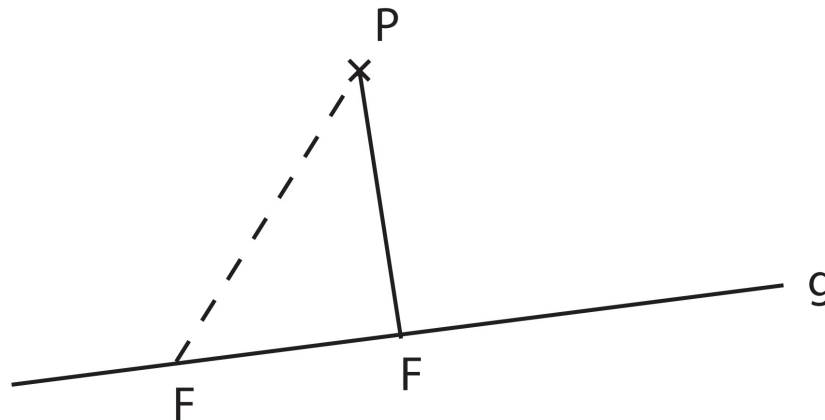
$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow E: 2x_1 - x_2 - x_3 - 1 = 0$$

$$g_1 \cap E = \{F\} \Rightarrow 2(2+2s) - (1-s) - (2-s) - 1 = 0 \Rightarrow s = 0$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(g_1; g_2) = |\vec{FP}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3}$$

## Alternative Möglichkeit zur Berechnung des Abstandes eines Punktes P von einer Geraden g im Raum



Vorgehen zur Bestimmung des Abstandes des Punktes P von der Geraden g:

- Den allgemeinen Vektor  $\vec{d} = \vec{FP}$  aufstellen, der gebildet wird von einem beliebigen Punkt  $F \in g$  und dem gegebenen Punkt P.
- Den Vektor  $\vec{FP}$  so bestimmen, dass  $\vec{FP}$  senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden g steht, d.h.  $\vec{FP} \circ \vec{r}_g = 0$ .
- Der Abstand des Punktes P zur Geraden g ist dann die Länge des Vektors  $\vec{FP}$ .

Beispiel:  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad P(5/3/6)$

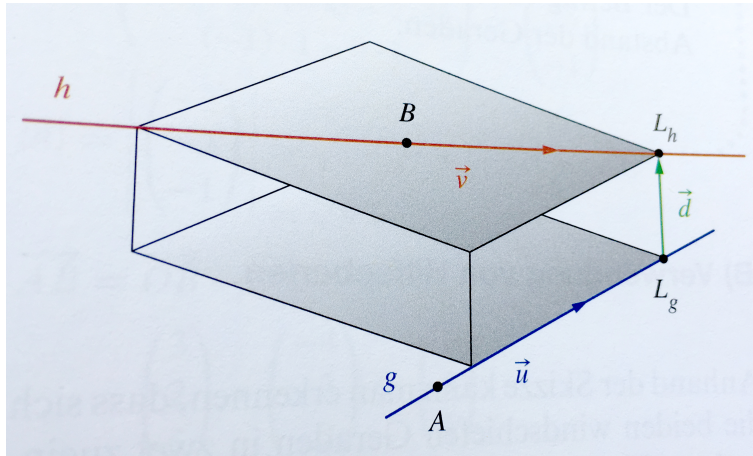
$$\vec{d} = \vec{FP} = \vec{p} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2+4t \\ 10+3t \\ -2-4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4t \\ -7-3t \\ 8+4t \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} \circ \vec{r}_g = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-4t \\ -7-3t \\ 8+4t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 4(3-4t) + 3(-7-3t) - 4(8+4t) = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow \vec{FP} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow d(P;g) = |\vec{FP}| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 9$$

## Berechnung des Abstandes zweier windschiefer Geraden im Raum

### 1. Lotfußpunktverfahren



Die kürzeste Entfernung zwischen den beiden Geraden entspricht dem Betrag des Verbindungsvektors  $\vec{d}$ , der zu beiden Geraden orthogonal ist.

Die Lotfußpunkte  $L_g$  und  $L_h$  liegen auf den Geraden  $g$  und  $h$ , also lassen sich ihre Ortsvektoren mithilfe der Geradengleichungen  $\overrightarrow{OL_g} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u}$  und  $\overrightarrow{OL_h} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \vec{v}$  darstellen.

$\vec{d}$  ist der Verbindungsvektor der beiden Lotfußpunkte  $L_g$  und  $L_h$  und muss senkrecht auf den Richtungsvektoren beider Geraden stehen, also  $\vec{d} \circ \vec{u} = 0$  und  $\vec{d} \circ \vec{v} = 0$ .

Beispiel:

Bestimmen Sie den Abstand der windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{OL}_g = \begin{pmatrix} -4-r \\ -3 \\ 2+2r \end{pmatrix} \quad \vec{OL}_h = \begin{pmatrix} 3+s \\ 2+s \\ 5-4s \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 3+s \\ 2+s \\ 5-4s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4-r \\ -3 \\ 2+2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+s+r \\ 5+s \\ 3-4s-2r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7+s+r \\ 5+s \\ 3-4s-2r \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -1-9s-5r=0$$

$$\begin{pmatrix} 7+s+r \\ 5+s \\ 3-4s-2r \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 18s+9r=0$$

(I)  $9s+5r=-1$

(II)  $18s+9r=0$

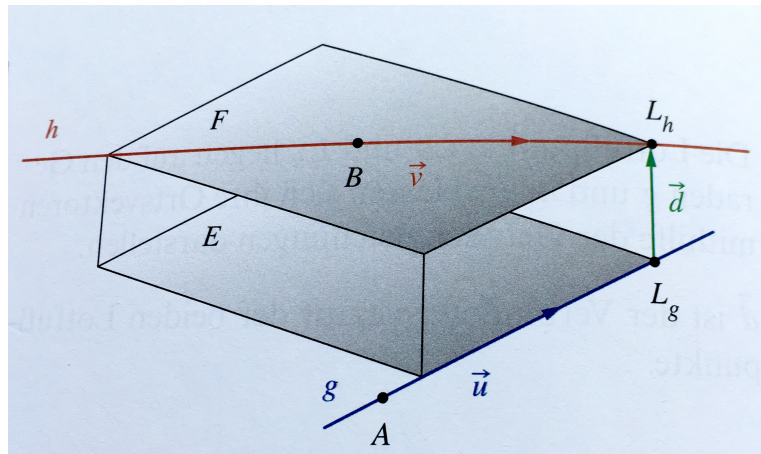
$2 \cdot (I) - (II): r=-2$

(I)  $\Rightarrow 9s-10=-1 \Rightarrow s=1$

$$\Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 7+1-2 \\ 5+1 \\ 3-4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow d(g;h) = |\vec{d}| = \sqrt{36+36+9} = 9$$



## 2. Verwendung von Hilfsebenen



Anhand der Skizze kann man erkennen, dass sich die beiden windschiefen Geraden in zwei zueinander echt parallele Ebenen einbetten lassen:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

$$F: \vec{x} = \vec{b} + t \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$$

Da der kürzeste Verbindungsvektor  $\vec{d}$  zu beiden Geraden senkrecht steht, ist er ein Normalenvektor dieser beiden Ebenen.

Offenbar ist der Abstand der beiden Geraden genauso groß wie der Abstand der beiden Ebenen und dieser ist damit genauso groß wie der Abstand eines Punktes der einen Ebene von der anderen Ebene.

Beispiel:

Bestimmen Sie den Abstand der windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E: -2x_1 - 2x_2 - x_3 + d = 0$$

$$A(-4/-3/2) \text{ einsetzen: } 8 + 6 - 2 + d = 0 \Rightarrow d = -12$$

$$\Rightarrow E: -2x_1 - 2x_2 - x_3 - 12 = 0$$

Abstand des Punktes B von der Ebene E:

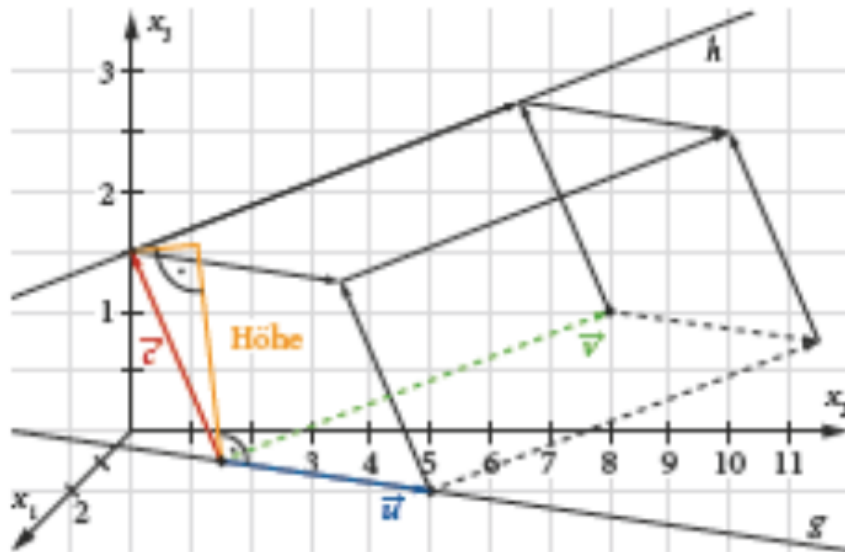
$$\text{Hilfsgerade l aufstellen: } l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

$$l \text{ in E einsetzen: } -2(3-2s) - 2(2-2s) - (5-s) - 12 = 0 \Rightarrow s = 3$$

$$\Rightarrow \vec{l} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(g;h) = |\vec{LB}| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 36 + 9} = 9$$

### 3. Berechnung des Abstands mithilfe eines Spats



Der Abstand zwischen  $g$  und  $h$  ist der kürzestmögliche Abstand zwischen Punkten aus  $g$  und  $h$ .

Dieser Abstand entspricht der Länge des Vektors, der senkrecht auf beiden Geraden steht. Dieser Vektor wird die Höhe eines Spats sein, den wir nun konstruieren:

Der Spat wird durch drei Vektoren aufgespannt. Als Grundfläche wählen wir das Parallelogramm, das die beiden Richtungsvektoren von  $g$  und  $h$  bilden und der dritte Vektor ist die Differenz der beiden Aufhängepunkte von  $g$  und  $h$ .

Die Höhe des Spats (in der Skizze orange) steht senkrecht auf der Grundfläche. Fasst man die Höhe als Vektor auf, so bildet dieser einen rechten Winkel zu jedem der beiden Richtungsvektoren und damit auch zu den Geraden  $g$  und  $h$ . Die Höhe stellt damit genau den gesuchten Abstand zwischen beiden Geraden her.

#### Beispiel:

Bestimmen Sie den Abstand der windschiefen Geraden

$$\vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$V_{\text{Spat}} = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} \Rightarrow \text{Höhe} = \frac{V_{\text{Spat}}}{\text{Grundfläche}}$$

$$\text{Grundfläche } A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$V_{\text{Spat}} = |(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = |-14 - 10 - 3| = 27$$

$$\Rightarrow d(g;h) = \text{Höhe} = \frac{V_{\text{Spat}}}{\text{Grundfläche}} = \frac{27}{3} = 9$$